| | |
|---|---|
| Title | The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics) |
| Author(s) | 清田, 正夫; 奥山, 哲郎; 和田, 倶幸 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (2012), 1784: 140-149 |
| Issue Date | 2012-03 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/172713 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 140-149



# The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups

東京医科歯科大学・教養部　清田正夫 (Kiyota,Masao)
(General Education, Tokyo Medical and Dental Universtity)
北海道教育大学・旭川校　奥山哲郎 (Okuyama,Tetsuro)
(Asahikawa Campus, Hokkaido University of Education)
東京農工大学・工学研究院　和田倶幸 (Wada,Tomoyuki)
(Graduate school of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology)

## 1　はじめに

この論説は，大分大学でこの 6 月に行われた代数的組み合わせ論の研究集会の報告と，かなりの部分が重複することをお許し頂きたい．ただし，そこでは省略した定理 1 の証明中，最も重要な部分である第 4 節の Case 1 の部分を，この論説では詳しく述べることを目的とする.

$G$ を有限群, $F$ を標数 $p>0$ の代数的閉体とし, $B$ を $FG$ のブロックでその defect group を $D$ とする．整数 $n$ の $p$-part を $n_p$ と書く．$|G|_p=p^a$ とし $|D|=p^d$ とおく．$\varphi$ を $B$ に含まれる任意の既約 Brauer 指標とする．その次数 $\varphi(1)$ は $p^{a-d}$ で割れる．したがって $\varphi(1)_p=p^{a-d+e}$, $\exists e\geq 0$ と書け，$e$ を $\varphi$ の**高さ (height)** といい，$h(\varphi)=e$ と書く．どのブロックにも高さ 0 の既約 Brauer 指標は存在する (Theorem IV.4.5 [6]).

$B$ に属する既約通常指標 $\chi$ も同じことが成り立ち，$\chi(1)_p=p^{a-d+f}$, $\exists f\geq 0$ と書け，$f=h(\chi)$ をやはり高さという．$\chi(1)\mid |G|$ であることから，$0\leq h(\chi)\leq d$ となる．有名な Brauer の height zero 予想や Alperin-McKay 予想, Olsson 予想は通常指標の高さに関する予想である．しかし既約 Brauer 指標 $\varphi$ については，$h(\varphi)$ に関する予想は知られていない．それは次数 $\varphi(1)$ やその $p$-部分を求めることが難しいためではないか．$\varphi(1)$ は必ずしも $|G|$ を割らないため，$h(\varphi)\not\leq d$ である．実際，Thackray によると，$G=\mathrm{McL}, p=2$ のとき主 2-ブロック $B$ には $\varphi(1)_2=2^9$ をみたす既約 Brauer 指標があり，$|G|_2=2^7$ より, $a=d=7$ であるが，$h(\varphi)=9>7=d$ となる (p.166 [6]).

一般にブロックに含まれる既約 Brauer 指標で高さ 0 のものは，どれくらいあるだろうか? $\mathrm{SL}(2,2^n)$ の 2-ブロックのように，ただ一つのこともあり，$\mathrm{SL}(2,p)$, $p$ : odd のとき full defect の $p$-ブロックのように，$(p-1)/2$ 個すべてが高さ 0 のこともある．我々は対称群の 2-ブロックについて，次の定理を得た.

**定理 1** (Kiyota-Okuyama-W [14]). $G = \mathfrak{S}_n$ を $n$ 次対称群とし，$p = 2$ とする．すると各 2-ブロック $B$ に含まれる既約 Brauer 指標で高さが 0 のものは，ただ一つである．

定理 1 を考えるに至った動機については最後の節で述べる．$\mathfrak{S}_n$ の既約通常指標の次数に関しては hook formula という公式があり，既約通常指標を与える Young diagram から次数が計算できる．既約 Brauer 指標の次数を求める公式はまだ知られていない．対称群のモジュラー表現については，分解行列を決定せよという未解決問題がある．既約 Brauer 指標の次数が分かっていないことが，分解行列を求めることを困難にしている．定理 1 の証明の難しさもここにある．$n \leq 17$ の場合には既約 Brauer 指標の次数が知られているが [16]，定理 1 の主張が成り立つかどうかを，すべてのブロックについてチェックするだけでも大変である．定理 1 が今までに知られていなかったのも無理はないと思われた．

定理 1 は次の Fong, James の定理を一般化した定理である (James の論文について越谷さんから教えて頂いたことに感謝致します)．

**定理 2** (Fong [7], James [10]). $G$ を有限群とし，$F$ を完全体で $\mathrm{char}(F) = 2$ とする．$V$ を絶対既約な非自明な $FG$-加群とする．もし $V$ が self-dual ならば，$\dim_F(V)$ は偶数である．

対称群の既約 $FG$-加群は素体上で絶対既約で，しかも self-dual であることから，この定理の直接の系として，次の定理が成り立つ．

**定理 3** (Fong [7], James [10]). $\mathfrak{S}_n$ を $n$ 次対称群とし，$F$ は標数 2 の体とする．$V$ を非自明な既約 $FG$-加群とすると $\dim(V)$ は偶数である．

**注 1.1** 定理 1 は定理 3 がブロックごとに成り立つことを示している．定理 1 は $p$ が奇素数のときは必ずしも成り立たない．次のような例がある．以下 $\mathrm{IBr}(B)$ で $B$ に属する既約 Brauer 指標全体の集合とし，$B_0$ を主ブロックとする．また既約 Brauer 指標を数字で表してあるが，それは次数を表し，同じ次数の指標が二つ以上ある時は，さらにインデックスを付けている．

(1) $p = 3$ のとき
 (1.1) $n = 3, 4$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 1_2 = \mathrm{sign}\}$ すべて高さ 0
 (1.2) $n = 5$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 4_1\}$ すべて高さ 0
 (1.3) $n = 6$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 1_2, 4_1, 4_2, 6\}$ 高さ 0 は 4 個，高さ 1 が 1 個
 (1.4) $n = 7$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 1_2, 13_1, 13_2, 20\}$ すべて高さ 0，$13 \nmid |G|$

(2) $p = 5$ のとき
 (2.1) $n = 5$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 1_2, 3_1, 3_2\}$ すべて高さ 0
 (2.2) $n = 6$ のとき $\mathrm{IBr}(B_0) = \{1_1, 1_2, 8_1, 8_2\}$ すべて高さ 0

**注 1.2** 定理 1 の主張は既約通常指標については成り立たない．$p = 2$ のとき，単位指標と符号指標は mod 2 reduction で共に単位指標となるが，$p$ が奇数のときは，一致しない．よって高さ 0 の

既約通常指標は主 $p$-ブロックの中に 2 個以上あり得る.

対称群のモジュラー表現に関して，最近いくつかの重要な結果，特にカテゴリカルな結果がある. Scopes は [19] で，対称群のブロックについては Donovan 予想が成り立つことを証明した. Chuang-Rouquier は [2] で，対称群 $\mathfrak{S}_n$ のブロックについて，Broué の abelian defect group 予想が成り立つことを，一般化して証明した．そこで，ブロック $B$ の weight を $w$ とするとき，$B$ と $\mathfrak{S}_{pw}$ の主 $p$-ブロック $\tilde{B}$ とは derived equivalent になることを証明している．しかしこれらの結果から直ちに定理 1 が導けるようには思われない．モジュラー表現の次数や次数の $p$-part は derived equivalence で変わってしまうためである．実際 $p=3$ のとき，主ブロック $B_0(\mathfrak{S}_7)$ は weight 2 で，$B_0(\mathfrak{S}_6)$ と derived equivalent であるが，height 0 の既約 Brauer 指標の個数は $l_0(B_0(\mathfrak{S}_7))=5, l_0(B_0(\mathfrak{S}_6))=4$ となり，異なる.

そこで我々が定理の証明の中で取ったのは，Green 対応と symplectic bilinear form の構成，そして James の定理を利用した $n$ に関する帰納法という古典的な方法である．しかしその証明は，簡単ではない.

なお，対称群のモジュラー表現論と Iwahori-Hecke 環や $\mathrm{GL}_n(q)$ の表現論におけるカテゴリカルな類似について，著者は不案内であるけれど，Olsson [18], Srinivasan [20], Hemmer [8], Turner [21], Donkin [3], Bessenrodt and Hill [1] 等の解説はいずれも興味深い．これらの事実と，我々の定理がどこかで結びついている可能性もある.

## 2 Preliminaries

対称群のモジュラー表現に関する基本的な言葉や結果を導入し，定理 1 を適切な表現に改める. James の [11] や James-Kerber の [13] を参照してください．$F$ を標数 2 の体とし，$\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$ とする.（ここで述べる結果は $F$ の標数が 2 である必要がないことが多いが，我々の結果が標数 2 の場合なので，標数 2 としておきます．）

$\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$ が $n$ の partition であるとは，$\mu_1,\mu_2,\ldots$ は 0 以上の整数で，$\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots,\mu_1+\mu_2+\cdots=n$ を満たすことをいう．このとき第一行目が $\mu_1$ 個の箱，第二行目が $\mu_2$ 個の箱，... のように，左側をそろえて，箱の作る行列を $[\mu]$ とかき，$\mu$ に関する Young diagram という.

$M^\mu:=(F_{\mathfrak{S}_\mu})^{\uparrow\mathfrak{S}_n}$ を $\mathfrak{S}_n$-set $[\mathfrak{S}_\mu\backslash\mathfrak{S}_n]$ による $F$ 上の置換加群とする．ここで，$\mathfrak{S}_\mu\simeq\mathfrak{S}_{\mu_1}\times\mathfrak{S}_{\mu_2}\times\cdots$ を $\mu$ に関する Young subgroup という．$M^\mu$ は $\mu$-tabloids とよばれる Young diagram の各箱に $1,2,\ldots,n$ の文字を任意に入れた $\mu$-tableau $t$ を，row stabilizer で動かした同値類を basis とする.

$M^\mu$ の submodule で，$\mu$-polytabloids とよばれる，$\mu$-tabloids に符号を付けて加えたものを basis とするものを Specht module といい，$S^\mu$ と書く．もし $F$ の標数が 0 のときは，$S^\mu$ がすべての既約 $F\mathfrak{S}_n$ 加群となる.

$n$ の partition $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$ が 2-regular とは，$\mu_1>\mu_2>\cdots$ を満たすときに言う．$\mu$ が 2-regular のとき，またそのときにかぎり，Specht module $S^\mu$ は unique な既約 quotient module $D^\mu$ をもつ．$D^\mu$ がすべての既約 $F\mathfrak{S}_n$-加群となる．Young diagram $[\mu]$ は 2-weight $w$ と 2-core $[\delta_k]$ をもつ．Young diagram $[\mu]$ の右側にある階段状の箱達から，2-rim hook とよばれる縦または横

に二個並んだ箱を取り除いたとき，$[\mu]$ の残部がふたたび Young diagram となるように，できるかぎり 2-rim hook を取り除いていく．もうこれ以上取り除けないとき，取り除いた 2-rim hooks の個数が $[\mu]$ の weight $w$ である．さらにそのときに残った残部が 2-core $[\delta_k]$ である．2-rim hooks の取り除き方は一意的でないが，$w$ と $\delta_k$ は一意的に定まる．(weight と core は本来 Young diagram $[\mu]$ に対して定まるものですが，partition $\mu$ に対しても同様に $\mu$ の weight $w$，また単に 2-core $\delta_k$ と言うことにします．hook, weight, core という言葉は中山正が導入した言葉のようです．[20])

**例 2.1** $n = 9$, $[4, 2^2, 1]$ の場合，Young diagram は $\begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & \\ \times & \times & & \\ \times & & & \end{array}$ となる．2-rim hook を，初めに第一行目の後ろの横二つ，次に第二列目の下から縦二つ，最後に第一列目の下から縦に二つという順で取り除くことができて，残部が $\begin{array}{ll} \times & \times \\ \times & \end{array}$ であるから，2-core が $[2, 1]$, 2-weight が $w = 3$ である．

**Nakayama Conjecture(1941)** (Conjecture と呼ばれているが，1947 年 G. de B. Robinson, Brauer により証明され，その後も多数の人により証明されている.) $S^\lambda$ と $S^\mu$ が $\mathfrak{S}_n$ の中で同じ 2-ブロックに属する $\Longleftrightarrow$Young diagram $[\lambda]$ と $[\mu]$ が同じ 2-cores と同じ 2-weights をもつ．

**例 2.2** $\mathfrak{S}_5$ には 7 個の partition がある．2-regular なものには $\circ$ をつけた．取り除く 2-rim hook については最初のものを $*$ で，次に取り除くものを $\diamond$ でその位置を表すことにする．残った部分を $\bullet$ で表す．これが 2-core となる．

すると二つの 2-ブロック $B_1, B_2$ があり，$k(B)$ を既約通常指標の個数，$l(B)$ を既約 Brauer 指標の個数，$w(B)$ を weight，$d(B)$ を defect (i.e. defect group の位数の指数部分，第 1 節では $d$ と書いた) とすると，右の表のようになっている．

| $2-regular$ | $[\mu]$ | $w$ | $2-core$ |
|---|---|---|---|
| $\circ$ $[5]$ | $\bullet\ \diamond\ \diamond\ *\ *$ | 2 | $[1]$ |
| $\circ$ $[4,1]$ | $\bullet\ \bullet\ *\ *$<br>$\bullet$ | 1 | $[2,1]$ |
| $\circ$ $[3,2]$ | $\bullet\ \diamond\ \diamond$<br>$*\ *$ | 2 | $[1]$ |
| $[3,1^2]$ | $\bullet\ \diamond\ \diamond$<br>$*$<br>$*$ | 2 | $[1]$ |
| $[2^2,1]$ | $\bullet\ *$<br>$\diamond\ *$<br>$\diamond$ | 2 | $[1]$ |
| $[2,1^3]$ | $\bullet\ \bullet$<br>$\bullet$<br>$*$<br>$*$ | 1 | $[2,1]$ |
| $[1^5]$ | $\bullet$<br>$\diamond$<br>$\diamond$<br>$*$<br>$*$ | 2 | $[1]$ |

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $k(B)$ | 5 | 2 |
| $l(B)$ | 2 | 1 |
| $w(B)$ | 2 | 1 |
| $d(B)$ | 3 | 1 |

以下はいずれもよく知られている．箇条書きにしていく．

1. 2-core は 0 以上の整数 $k$ があって $\delta_k = (k, k-1, k-2, \dots, 2, 1)$ という形をしている．ただし $k = 0$ のときは $\delta_0 = [0]$ とする．すると箱の個数は，$k > 0$ のときは $|\delta_k| := m = k(k+1)/2$ より三角数である．

2. $D(B)$ を $B$ の defect group (定義は避けるが $B$ に付随して定まる $G$ の 2-部分群) とすると，$D(B) \simeq D \in \mathrm{Syl}_2(\mathfrak{S}_{2w})$ となり，Chuang-Rouquier [2] により，$B$ は $\mathfrak{S}_{2w}$ の主 2-ブロックに derived equivalent である．

3. $\mathcal{P}(n)$ を $n$ の partition 全体の集合とする．$\mu_0 := (k+2w, k-1, \dots, 2, 1)$ という $n$ の patition がある．これは 2-regular で 2-core が $\delta_k$ となるような partition である．

4. $\mathcal{P}(n)$ には次のような自然な全順序がある．$\lambda, \mu \in \mathcal{P}(n)$ に対し $\lambda < \mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{i-1} = \mu_{i-1}, \lambda_i < \mu_i, \dots$ とする．すると $\mu_0$ は $\delta_k$ を 2-core にもつ 2-regular な partition の中で最大のものである．

5. $\mu_0$ に関して，$M^{\mu_0} = S^{\mu_0} \oplus M'$ と分解し，ここで $M' \notin B$ である．このとき $S^{\mu_0} = D^{\mu_0}$ を満たしている．さらに次が分かる．

**Lemma** $D^{\mu_0}$ は高さ 0 の既約 $F\mathfrak{S}_n$-加群で，その vertex は $D(B)$ で source は trivial module $F_{D(B)}$ である．

ここで定理 1 を改めて詳細に述べる．

**定理 1** (Kiyota-Okuyama-W [14])．$\mathfrak{S}_n$ を $n$ 次対称群とし，$p = 2$ とする．$B$ を $\mathfrak{S}_n$ の任意の 2-ブロックで 2-core を $\delta_k$ とする．すると $D^{\mu_0}$ は $B$ に属する高さ 0 の unique な既約 $F\mathfrak{S}_n$-加群である．

**注 2.1** 定理 1 は Fong, James の定理 3 から，$b$ が主 2-ブロックの時は正しい．また Fong, James の定理 3 は，full defect の 2 ブロックは主ブロックしかないことも言っている．

## 3 定理 1 と同値な二つの定理

ここでは定理 1 と同値な二つの定理について述べる．後に定理 1 を証明するとき，二つの場合に分ける．それぞれの場合について，同値な定理を証明する．

**定理 3.1** $\mu \in \mathcal{P}(n)$ を 2-regular とし，その 2-core を $\delta_k$ とする．このとき，$S^\mu$ (通常既約指標) の $p = 2$ に関する高さが正である $\Longleftrightarrow$ 分解数 $d_{\mu\mu_0}$ が偶数になる．

もう一つの定理を述べるには，もう少し言葉や結果が必要である．やはり $\mu \in \mathcal{P}(n)$ は 2-regular で，その 2-core を $\delta_k$ とする．

$\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，$G = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_\Omega$ とする．$\Omega_{2w} = \{1, 2, \ldots, 2w\}$ とし，$G_{2w} = \mathfrak{S}_{\Omega_{2w}}$ とする．さらに $\Omega'_m = \{2w+1, \ldots, 2w+m\}$ とし，$K = \mathfrak{S}_{\Omega'_m}$ とする．ただし $m = |\delta_k| = k(k+1)/2$ である．すると $\Omega = \Omega_{2w} \sqcup \Omega'_m$ である．

$D^\mu$ を $B$ に属する既約 $F\mathfrak{S}_n$-加群でその 2-core を $\delta_k$ とする．$Q$ を $D^\mu$ の vertex とする．すると $N_G(Q) \subseteq G_{2w} \times K$ となる．したがって $(G, Q, G_{2w} \times K)$ に関する $D^\mu$ の Green 対応子 $f(D^\mu)$ を考えることができる．$f(D^\mu)$ は直既約 $F(G_{2w} \times K)$-加群である．

$f(D^\mu)$ は，$T^\mu$ という直既約 $FG_{2w}$-加群があって，$T^\mu \otimes_F S$ に同型になる．ここで，$S$ は $D^{\delta_k}$ に同型な $K$ の defect 0 の 2-ブロックに属する既約 $FK$-加群である．するともう一つの同値な定理は次のようになる．

**定理 3.2** $B$ に属する既約 $FG$-加群 $D^\mu$ は，$\mu \neq \mu_0$ ならば，対応する $T^\mu$ は偶数次元となる．

定理 3.1 と定理 3.2 は共に定理 1 と同値になる．ここでは証明は省略する．

## 4 定理 1 の証明の概略

$G = \mathfrak{S}_n$ の任意の 2-ブロック $B$ に属する高さ 0 の既約 $FG$-加群を $D^\mu$ とする．ただしその 2-core を $\delta_k$ とする．次の二つの場合に分けて，$\mu = \mu_0$ であることを言う．以下 $FG$-加群は右加群とする．

Case 1. $\mu$ が少なくとも $k+1$ 個の nonzero parts をもつとき (このとき $\mu \neq \mu_0$ であることに注意) → このとき定理 3.2 をいう．

(1) $T^\mu$ が偶数次元 $\Longleftrightarrow$ $D^\mu e_1$ が偶数次元ということが言える．ここで，$e_1$ は $FK$ の primitive idempotent で Young symmetrizer と呼ばれる ([9],[22])．それは standard $\delta_k$-tableaux 全体の中で自然な全順序に関して最大の standard tableau $t_1$ に対応するものである．

(2) $e_0$ を $FK$ の defect 0 のブロックべき等元とする．$e_0$ は $FK$ の中心に属するから，$S^\mu e_0$ は $FK$-加群となる．置換加群 $M^\mu$ の $F$-基底 $E_t$, ($t$ は standard $\mu$-tableau を動く) を正規直交基底とするような，自然な symmetric, non-singular, $G$-invariant bilinear form を $\langle\ ,\ \rangle$ とする．すると

$$S^\mu = S^\mu e_0 \oplus S^\mu {e_0}'$$

と書ける．ここで ${e_0}' = 1_G - e_0 \in FG$. また

$$S^\mu e_0 \cap (S^\mu e_0)^\perp = (S^\mu \cap (S^\mu)^\perp) e_0$$

であるから

$$S^\mu e_0/(S^\mu e_0 \cap (S^\mu e_0)^\perp) \simeq D^\mu e_0$$

となる．また $e_1$ は $e_0$ に属する $FK$ の primitive idempotent, つまり $e_0e_1 = e_1$ とする．今内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて，$S^\mu e_1 = S^\mu e_0 e_1$ 上に新たな bilinear form $b$ を次のように定義する．

$$b(ve_1, ue_1) := \langle ve_1, ue_1 x_0\rangle = \langle ve_1 x_0, u\rangle, \quad ve_1, ue_1 \in S^\mu e_1$$

ここで $x_0 \in K$ は $t_1 x_0 = t_f$ をみたす unique な $K$ に属する元とする．ただし $t_f$ は最小の $\delta_k$-tableau で，ちょうど $t_1$ の共役 (つまり行と列を入れ替えた tableau) になっていて，したがって $x_0$ は involution となっている．

まず $b$ が $S^\mu e_1$ 上 symplectic，つまり $b(ve_1, ve_1) = 0$ for all $v \in S^\mu e_0$ であることをいう．Specht 加群 $S^\mu$ の $F$-基底として，$\mu$-polytabloid $E_t$ がとれるので，$b(E_te_1, E_te_1) = 0$ をいえば十分である．ここで $E_t = \rho \cdot x_t \kappa_t$ という形をしている．なお $\rho = \rho_s := \sum_{x\in R_s} x$ で，$s$ は任意の固定した standard $\mu$-tableau, $R_s$ は $s$ の行 stabilizer, $t$ は任意の standard $\mu$-tableau, $\kappa_t = \sum_{y \in C_t} \mathrm{sgn}(y)y$ で $C_t$ は $t$ の列 stabilizer のこと．今 $\mathrm{char}(F) = 2$ なので符号 $\mathrm{sgn}(y)$ は無視して良い．また $x_t$ は $s \cdot x_t = t$ をみたす unique な $G := \mathfrak{S}_n$ の元のこと．すると

$$b(E_te_1, E_te_1) = \langle E_te_1x_0, E_t\rangle = \langle \rho\cdot x_t\kappa_t e_1 x_0, \rho\cdot x_t\kappa_t\rangle = \langle \rho \cdot x_t \kappa_t e_1 x_0 \kappa_t, \rho\cdot x_t\rangle.$$

最後の等式は，$\kappa_t$ を各 $y \in C_t$ 達の和に分解して，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が $G$-invariant であることから内積の左右成分の右から $y^{-1}$ をかけて，再び足しあわせれば，ちょうど等式を意味する．

また $e_1x_0 \in FK$ であるから，$\kappa_t e_1 x_0 \kappa_t = 0$ を得る．なぜなら，$e_1 = \sum_{g\in K} a_g g$ と書けば，

$$\kappa_t g x_0 \kappa_t = gx_0 \cdot (gx_0)^{-1}\kappa_t g x_0 \cdot \kappa_t = gx_0 \cdot \widehat{C_t{}^{gx_0}}\widehat{C_t}$$

となる．なお $\hat{X}$ は群 $X$ の元の総和を表す．さらに一般に群 $G$ の部分群 $H, K$ に対し $|HK| = |H||K|/|H\cap K|$ であるから，$\hat{H}\hat{K} = |H \cap K| \sum_{z\in HK} z$ となることに注意して，

$$gx_0 \cdot \widehat{C_t{}^{gx_0}}\widehat{C_t} = gx_0 \cdot |C_t{}^{gx_0} \cap C_t| \sum_{z \in C_t{}^{gx_0}C_t} z = 0$$

を得る．ただし最後の 0 に一致することは，$\mathfrak{S}_n$ の任意の $\mu$-tableau $t$ と，$K$ の任意の元 $k$ に対して，$t$ の列 stabilizer $C_t$ について，$C_t^k \cap C_t$ は互換を含むことが言えるので，体 $F$ 上 $|C_t{}^{gx_0} \cap C_t| = 0$ であることから来る．したがって新しい bilinear form $b$ は

$$D^\mu e_1 \simeq (S^\mu/(S^\mu \cap (S^\mu)^\perp))e_1 \simeq S^\mu e_1/S^\mu e_1 \cap (S^\mu e_1)^{b\perp}$$

上，symplectic, non-singular となり，したがって $D^\mu e_1$ が偶数次元を得る．ここで $(S^\mu)^\perp = \{v \in S^\mu \mid \langle v, u\rangle = 0 \text{ for all } u \in S^\mu\}$ のこと，また $(S^\mu e_1)^{b\perp} = \{ve_1 \in S^\mu e_1 \mid b(ve_1, ue_1) = 0 \text{ for all } ue_1 \in S^\mu e_1\}$ のこととする．

よって (1) により，定理 3.2 の証明が導かれる．(この辺の言葉や結果は，H.Weyl の [22] にあり，岩堀先生の著書 [9] に詳しく書かれています．岩堀先生のご冥福を祈ります．)

Case 2. $\mu$ がちょうど $k$ 個の nonzero parts をもつとき

次の James の定理を用いて $n$ に関する induction で定理 3.1 を証明する．ただし $k=0,1$ のときは 2-core の形から，ブロック $B$ は主ブロックとなり，注 2.1 で述べたように，Fong, James の定理 3 よりすでに証明されている．よって $k \neq 0,1$ としてよい．

**Theorem** (James [12]). $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k), \nu=(\nu_1,\dots,\nu_k)$ を $n$ の partition で，$\mu_k \neq 0, \nu_k \neq 0$ とする．$\mu$ は 2-regular とする．すると $\overline{\mu}=(\mu_1-1,\dots,\mu_k-1), \overline{\nu}=(\nu_1-1,\dots,\nu_k-1)$ は $n-k$ の partition となり，$\overline{\mu}$ は 2-regular となる．このとき $d_{\nu\mu}=d_{\overline{\nu}\,\overline{\mu}}$ が成り立つ．

また $\mu$ がちょうど $k$ 個の non-zero parts を持つときは，標数 0 の体上の加群と考えた $S^{\mu}$ と $S^{\overline{\mu}}$ の属する $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_{n-k}$ の 2-ブロック $B$ と $\overline{B}$（それぞれ 2-weight $w$, 2-core が，$\delta_k$, $\delta_{k-1}$ のブロック）における，高さが一致することが言える．このことを用いて，James の定理から，$n$ に関する induction により，定理 3.1 がすぐに証明できる．

## 5 関連する結果

定理 1 に関連する結果と，定理 1 が成り立つのではないかと考えるに至った動機について述べる．

**1** Question (Danz, Külshammer, Zimmermann [4],[5]). $F$ を標数 2 の体で $\lambda$ を $n$ の 2-regular partition とする．$D^{\lambda}$ を既約 $F\mathfrak{S}_n$-加群とする．$D^{\lambda}$ の source $V$ は，もし non-trivial ならば，偶数次元か？

定理 1 より，もし $\lambda=\mu_0$ のときは，$D^{\lambda}$ は trivial source をもつ．もし $\lambda \neq \mu_0$ ならば，$D^{\lambda}$ は正の高さをもつ．有限群 $G$ の既約 $FG$-加群 $S$ について，$S$ が $p$-ブロック $B$ に属するとする．$B$ の defect group を $D$ とする．次の村井の定理 [15] が知られている．$S$ が正の高さをもつための必要十分条件は，$S$ の vertex $P$ が，$P<D$ であるか，そうでなければ source $V$ は偶数次元である．$P<D$ のときは，$V$ が trivial かまたは偶数次元かどうかは分からず，彼らの question が正しいかどうかは現時点では分からない．$V$ は直既約 $FP$-加群なので，一般には $V$ は 1 より大きな奇数次元になり得る．

**2** 次の proposition がある．

**Proposition** (Okuyama-W [17]). $G$ を有限群，$B$ を $G$ の $p$-ブロックとし，$C_B$ を $B$ のカルタン行列とする．$B$ の defect を $d$ とする．このとき

$$\sum_{\varphi\in \mathrm{IBr}(B)} \left(\frac{\varphi(1)}{p^{a-d}}\right)^2 \not\equiv 0 \pmod p \Longrightarrow \mathrm{Tr}(p^d C_B^{-1}) \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$$

が成り立つ．特に $C_B$ のある固有値 $\rho$ で，$p^d/\rho \not\equiv 0 \pmod{(\pi)}$ を満たすものがある．

Proposition の主張で，条件 $\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)}\left(\frac{\varphi(1)}{p^{a-d}}\right)^2 \not\equiv 0 \pmod p$ を $(*)$ とおく．$G$ が $p$-可解群ならば，その任意の $p$-ブロックは $(*)$ を満たす．しかし $(*)$ は一般には成り立たない．例えば $G = \mathrm{SL}(2,p), p>3$ のとき，$B$ を full defect の $p$-ブロックとすると，$D$ は位数 $p$ の巡回群だが，$(*)$ は成り立たない．さらに結論の部分さえも成り立たない．つまりカルタン行列のすべての固有値 $\rho$ について $p/\rho \equiv 0 \pmod{(\pi)}$ が成り立つ．同じ結果が $G = \mathfrak{S}_p, p>3$ で $B$ が主 $p$-ブロックのときにも成り立つ．

$p=2$ でこのような例があるだろうか？ 特に対称群ではどうなのだろうか？という疑問がこの問題を考えるきっかけとなった．定理 1 を得た結果，次が成り立つ．

**Corollary.** 対称群 $\mathfrak{S}_n$ に対し任意の 2-ブロック $B$ は，$(*)$ が成り立つ．

**Acknowledgements.** The authors express their heartfelt thanks to Professor Hiroki Sasaki for holding the series of conferences and giving them occasions not only to present their own resuts but also to discuss exciting problems in Kyoto and Matsumoto.

## 参考文献

[1] C. Bessenrodt and D. Hill, Cartan invariants of symmetric groups and Iwahori-Hecke algebras, J. London Math. Soc.(2), 81(2010) 113-128.

[2] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification, Ann. Math., (2) 167(2008), 245-298.

[3] S. Donkin, Representations of Hecke Algebras and Characters of Symmetric Groups, Progress in Mathematics 210(2003), 49-67 in Studies in Memory of Issai Schur, edited by J.A. Melinikov and R. Rentschler.

[4] S. Danz and B. Külshammer, Vertices of simple modules for symmetric groups: A Survey, Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babes-Bolyai" Presa University Clujeană, Cluj-Napoca,(2009), 61-77.

[5] S. Danz, B. Külshammer and R. Zimmermann, On vertices of simple modules for symmetric groups of small degrees, J. Algebra 320(2008), 680-707.

[6] W. Feit, The representation Theory of Finite Groups, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1982.

[7] P. Fong, On decomposition numbers of $J_1$ and $R(q)$, Sympos. Math. Vol. XIII(1974), 414-422, Acad. Press.

[8] D.J. Hemmer, An introduction to the cohomology and modular representation theory of the symmetric group, 2007, AMS conference talk.

[9] 岩堀　長慶, 対称群と一般線型群の表現論, 岩波書店, 1978.

[10] G.D. James, Representations of the Symmetric Groups over the Field of Order 2, J. Algebra 38(1976), 280-308.

[11] G.D. James, The Representation Theory of the Symmetric Groups, Lecture Notes in Mathematics, 682, Springer-Verlag, 1978.

[12] G.D. James, On the decomposition matrices of the symmetric groups, III, J. Algebra 71(1981) 115–122.

[13] G.D. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric groups, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 16, Addison-Wesley, 1981.

[14] M. Kiyota, T. Okuyama and T. Wada, The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups, preprint, 2011.

[15] M. Murai, Block induction, normal subgroups and characters of height zero, Osaka J.Math., 31(1994), 9–25.

[16] http://www.math.rwth-aachen.de/ MOC/decomposition/

[17] T. Okuyama and T. Wada, Eigenvalues of Cartan matrices of blocks in finite groups, Contemporary Mathematics, 524(2010), 127–138, Amer. Math. Soc., Proceedings of Conference on Character Theory of Finite Groups – In Honor of Martin Isaacs – held at University of Valencia, June 3-5, 2009.

[18] J.B. Olsson, Combinatorics and Representations of Finite Groups, Vorlesungen aus dem Fachberichi Mathematik der Universität GH Essen, Heft 20, 1993.

[19] J. Scopes, Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symmetric gorups, J. Algebra 142(1991), 441-455.

[20] B. Srinivasan, Modular representations of finite groups of Lie type in a non-defining characteristic, Groups-Canberra 1989, Springer Lect. Notes 1456(1990), 96–105.

[21] Will Turner, Rock blocks, Mem. Amer. Math. Soc. 202(2009), no. 947.

[22] H. Weyl, The Classical Groups; Their Invariants and Representations, Princeton University Press, 1946.